(Corrigé) 3 Math

تصحيح الفرض الجزئي

امتحان مقياس الأساسية - قاعدة رياضيات

2025 - 2026 - قسم الرياضيات - جامعة الوادي

تمرين 1.

1. من أجل x, h من $\mathbb{R}^n$

$$f(x+h) = \|A(x+h) - b\|^2 + \varepsilon \|x+h\|^2$$

$$= f(x) + L(h) + \theta(h)$$

حيث

$$\theta(h) = \|Ah\|^2 + \varepsilon \|h\|^2$$

$$L(h) = 2\langle Ax - b, Ah \rangle + 2\varepsilon \langle x, h \rangle$$

$$0 \leq \frac{|\theta(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|A\|^2 \|h\|^2 + \varepsilon \|h\|^2}{\|h\|} \longrightarrow 0$$

لما $\|h\| \to 0$

L خطي و ادن

$$df(x)(h) = L(h)$$

$$= 2\langle {}^tAAx, h \rangle + 2\varepsilon \langle x, h \rangle - 2\langle {}^tAb, h \rangle$$

$$= \langle (2\,{}^tAA + 2\varepsilon I)x - 2\,{}^tAb, h \rangle$$

و منه

$$\nabla f(x) = (2\,{}^tAA + 2\varepsilon I)x - 2\,{}^tAb$$

و منه

$$H_f(x) = J_{\nabla f}(x) = 2\,{}^tAA + 2\varepsilon I$$

2. لـ $y, x \in \mathbb{R}$

$$\langle H_\varepsilon(x)y, y\rangle = \langle (2{}^tAA + 2\varepsilon I)y, y\rangle$$

$$= \langle 2\,{}^tAAy, y\rangle + \langle 2\varepsilon I y, y\rangle$$

$$= 2\langle Ay, Ay\rangle + 2\varepsilon\langle y, y\rangle$$

$$= 2\|Ay\|^2 + 2\varepsilon\|y\|^2$$

$$\geq 2\varepsilon\|y\|^2 \quad (2\varepsilon > 0)$$

حسب الخاصية المميزة للتحدب فإن f محدب بالقوة 2ε محدب تماما، كون $f \in C^1$، محدب بالقوة على $\mathbb{R}^n$ هو يقبل نقطة صغرى وحيدة $\bar{x}$ تحقق $\nabla f(\bar{x}) = 0$ أي

$$2({}^tAA + \varepsilon I)\bar{x} - 2\,{}^tAAb = 0$$

ومنه

$$\bar{x} = ({}^tAA + \varepsilon I)^{-1}\,{}^tAAb$$

تمرين 2.

1. طريقة التدرج بخطوة ثابتة

$x^0 \in \mathbb{R}^n$، $x^{k+1} = x^k - \rho\nabla f(x^k)$، $k \in \mathbb{N}$

شروط نظرية التقارب

$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$، f محدب بالقوة $\alpha > 0$ ، ∇f ليبشيتزي بثابت $M > 0$

$\rho \in]0, \frac{2\alpha}{M}[$.

2. طريقة نيوتن

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - y$$

$$\nabla f(x,y) = {}^t(2x + y, y + 2x), \quad H_\varepsilon(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(x,y)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x^k + y^k \\ 2y^k + x^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

تمرين 3 :

1. القيم الذاتية لـ A

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda \in \{1, 3\}$$

موجبة كلها بمعنى f محدب بالتوابع على $\mathbb{R}^2$، نقطة صغرى وحيدة

تحقق $\nabla f(\bar{x}) = A\bar{x} - b = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$3 = \lambda_{max} = M$ ، $1 = \lambda_{min} = a$ ، $\alpha \in]0, \frac{2a}{M}[$ ، إذن

ب- $\alpha \in]0, \frac{2}{3}[$ التبرير.

$$x^{k+1} - \bar{x} = x^k - \bar{x} - \alpha(Ax^k - b)$$
$$= x^k - \bar{x} - \alpha(Ax^k - A\bar{x})$$
$$= (x^k - \bar{x}) - \alpha A(x^k - \bar{x})$$

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 = \|x^k - \bar{x}\|^2 + \alpha^2 \|A(x^k - \bar{x})\|^2$$
$$- 2\alpha \langle A(x^k - \bar{x}), x^k - \bar{x} \rangle$$
$$\leq (1 + \alpha^2 \lambda_{max} - 2\alpha\lambda_{min}) \|x^k - \bar{x}\|^2$$

(باستعمال العلاقة $\lambda_{min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{max}\|x\|^2$)

ومنه تتقارب المتتالية إذا تحقق شرط التقلص،

أي $1 + 3\alpha^2 - 2\alpha < 1$ يعني $\alpha \in]0, \frac{2}{3}[$

تمرين 4.

1. لتكن x و y من L_α و $t \in [0,1]$، كون f محدب

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$
$$\leq t\alpha + (1-t)\alpha$$
$$= \alpha$$

ومنه $tx + (1-t)y \in L_\alpha$

إذا L_α محدب

$$L^\alpha = f^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

L^α يكتب على شكل صورة عكسية لمغلق وفق تابع مستمر إذا L_α مغلق في $\mathbb{R}^n$

2. نفرض أن f تناقضي، نبرهن أن L_α محدودة، لتكن $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ من L_α، بالفعل نفرض $\|x^k\| \to +\infty$، إذا

$f(x^k) \to +\infty$ تناقض مع كون $\forall k \in \mathbb{N}\ f(x^k) \leq \alpha$

إذا L_α محدودة، كذلك مغلقة. إذا هي متراصة

حسب غير ستراس، f مستمرة على المتراص L_α،

إذا المسألة $\min_{x \in L_\alpha} f(x)$ تقبل على الأقل

حل في $\mathbb{R}^n$، بجعل $\alpha \to +\infty$، يكون الحل في $\mathbb{R}^n$.

4.5 نقطة لكل سؤال