

Exercice : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$ -espace préhilbertien; $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset H$.

1) Montrer que : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$. .. (2 points)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + (\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) + \|y\|^2 \\ = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \text{ Donc: } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle x, y \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\text{le même: } \|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy \rangle = \dots = \|x\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\text{Donc: } \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\langle x, y \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle x, y \rangle = 0 \wedge \operatorname{Im}\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y \quad *$$

2) Montrer que : $\forall x \in H, \langle a, x+a+b \rangle = \langle b, x+a+b \rangle \Rightarrow \|a\| = \|b\|$.. (2 points)

$$\forall x \in H, \langle a, x+a+b \rangle = \langle b, x+a+b \rangle \Rightarrow \forall x \in H, \langle a, x+a+b \rangle - \langle b, x+a+b \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in H, \langle a-b, x+a+b \rangle = 0 \Rightarrow \langle a-b, -2b+a+b \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle a-b, a-b \rangle = \|a-b\|^2 = 0 \Rightarrow \|a-b\| = 0 \Rightarrow a-b = 0$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow \|a\| = \|b\| \quad *$$

3) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que : $\forall a \in H, \|a\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|}$. .. (2 points)

$$\forall x \in H - \{0\}, |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \|x\| \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz})$$

$$\Rightarrow \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|} \leq \|a\| \Rightarrow \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|} \leq \|a\| \quad (1)$$

$$\frac{|\langle a, a \rangle|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| \leq \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|} \quad (\text{si } a \neq 0) \quad (2)$$

$$\text{si } a \neq 0: (1) \wedge (2) \Rightarrow \|a\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|}$$

$$\text{si } a = 0: |\langle a, x \rangle| = 0 \wedge \|a\| = 0 \Rightarrow \dots \quad *$$

4) Montrer que : $E^\perp = \overline{(\operatorname{Vect} E)^\perp}$ (2 points)

$$E \subset \operatorname{Vect} E \xrightarrow{\text{top}} \overline{\operatorname{Vect} E} \Rightarrow E \subset \overline{\operatorname{Vect} E} \Rightarrow \overline{\operatorname{Vect} E}^\perp \subset E^\perp \quad (A)$$

(Car D'après TD n°2 on a : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$)

$$\text{autre part on a: } x \in E^\perp \Rightarrow x \perp E \Rightarrow x \perp \overline{\operatorname{Vect} E} \quad (\text{TD n°2})$$

$$\Rightarrow x \in \overline{\operatorname{Vect} E}^\perp \quad \text{Donc: } E^\perp \subset \overline{\operatorname{Vect} E}^\perp \quad (B)$$

$$(A) \wedge (B) \Rightarrow E^\perp = \overline{\operatorname{Vect} E}^\perp$$

5) Montrer que $E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp$.

.... (3 points)

$$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp$$

$$x \in E^\perp \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \forall y \in E : x \perp \{y\}$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E : x \in \{y\}^\perp$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp \right) \text{ Donc : } E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp$$

(car en Algèbre : $[A=B] \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B]$)

6) Montrer que : B base orthogonal de $H \Rightarrow \forall x \in H, x = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$.

.... (3 points)

Soit $x \in H$. B base de $H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

B est orthogonal $\Rightarrow \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ Donc :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j \|e_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|e_j\|^2}$$

Donc : $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|e_j\|^2} e_j$ * ($e_j \neq 0$ car B est une base de H)

7) En déduire que : B base orthonormal de $H \Rightarrow \forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$. (3 points)

B est orthonormal $\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ Donc : $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, y \rangle$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \left(\sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \end{aligned}$$

8) $(x_n), (y_n)$ deux suites de Cauchy de H ($\dim H = \infty$). Montrer que $(\langle x_n, y_n \rangle)$ est convergente. (3 points)

$$|\langle x_p, y_p \rangle - \langle x_q, y_q \rangle| = |\langle x_p, y_p \rangle - \langle x_p, y_q \rangle + \langle x_p, y_q \rangle - \langle x_q, y_q \rangle| =$$

$$|\langle x_p, y_p - y_q \rangle + \langle x_p - x_q, y_q \rangle| \leq |\langle x_p, y_p - y_q \rangle| + |\langle x_p - x_q, y_q \rangle|$$

$$\leq \|x_p\| \|y_p - y_q\| + \|x_p - x_q\| \|y_q\|, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^* \text{ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leq A \|y_p - y_q\| + B \|x_p - x_q\| \quad (\text{car } (x_n) \text{ Cauchy} \Rightarrow (x_n) \text{ bornée} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \|x_n\| \leq A)$$

$$\Rightarrow \lim_{p, q \rightarrow \infty} |\langle x_p, y_p \rangle - \langle x_q, y_q \rangle| \leq A \lim_{p, q \rightarrow \infty} \|y_p - y_q\| + B \lim_{p, q \rightarrow \infty} \|x_p - x_q\| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{p, q \rightarrow \infty} |\langle x_p, y_p \rangle - \langle x_q, y_q \rangle| = 0 \quad \text{Donc : } (\langle x_n, y_n \rangle) \text{ est Cauchy dans } \mathbb{C}$$

Mais $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet Donc : $(\langle x_n, y_n \rangle)$ est convergente dans $\mathbb{C}$